Géométrie plane

EXERCICE n° 1
Soit A et B deux points distincts du plan.
Le point C est défini par : $4\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Construire le point C.
3. Que peut-on dire des points A, B et C ?

EXERCICE n° 2

1. Tracer un quadrilatère quelconque $ABCD$.
   Placer les milieux I, J, K et L des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
2. Prouver que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

EXERCICE n° 3
Soit ABC un triangle quelconque.
On considère les points M et N tels que : $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{AB}$.
Démontrer que les droites (AN) et (BM) sont parallèles.

EXERCICE n° 4
Soit ABC un triangle quelconque.
On considère les points I, J et K définis par : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AC}$ et J est le milieu de $[BC]$.
Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

EXERCICE n° 5
Soit ABC un triangle.

1. Placer les points M et N tels que : $4\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA}$ et $4\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

EXERCICE n° 6
Soit ABC un triangle.
On considère le point I défini par : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AB}$, le point G symétrique de C par rapport à I et le point H défini par $\overrightarrow{AH} = \dfrac{-3}{4}\,\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$.

1. Tracer la figure.
2. Démontrer que les points A, G et H sont alignés.

$1^{\text{ère}}$S (AP)

Second degré et Géométrie plane

EXERCICE n° 1

Soit A et B deux points distincts du plan.

Le point C est défini par : $4\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Construire le point C.
3. Que peut-on dire des points A, B et C ?

1. $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB}$
   $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{AB}$
   $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}$
   $\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
   $6\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

2. On utilise le résultat de la question précédente.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE n° 2

1. Tracer un quadrilatère quelconque $ABCD$.
   Placer les milieux I, J, K et L des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
2. Prouver que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

I, J, K et L sont les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ donc :

$\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{LD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

EXERCICE n° 3

Soit ABC un triangle quelconque.

On considère les points M et N tels que : $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{AB}$.

Démontrer que les droites (AN) et (BM) sont parallèles.

On cherche à prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{NC}$ donc $2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = 3\overrightarrow{AN}$.

On remarque alors que $\overrightarrow{BM} = 3 \times \overrightarrow{AN}$. Ces deux vecteurs sont donc colinéaires et les droites (AN) et (BM) sont bien parallèles.

EXERCICE n° 4

Soit ABC un triangle quelconque.

On considère les points I, J et K définis par : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AC}$ et J est le milieu de $[BC]$.

Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

On cherche à prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

Remarque : dire que le point J est le milieu de $[BC]$ signifie que $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

$\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$ donc $I\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AC}$ donc $K\left(\dfrac{3}{4}; 0\right)$.

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$

On en déduit que $J\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{IJ}\left(\dfrac{1}{2} - 0; \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\right)$ soit $\overrightarrow{IJ}\left(\dfrac{1}{2}; -1\right)$ $\qquad$ $\overrightarrow{IK}\left(\dfrac{3}{4} - 0\ ;\ 0 - \dfrac{3}{2}\right)$ soit $\overrightarrow{IK}\left(\dfrac{3}{4}; -\dfrac{3}{2}\right)$

On remarque alors que $\overrightarrow{IK} = \dfrac{3}{2} \times \overrightarrow{IJ}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont donc colinéaires, les points I, J et K sont alors alignés.